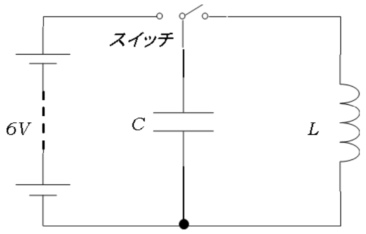
【実験】共振回路の周期（実験書・データ）

【目的】共振回路の周期 T が $T = 2\pi\sqrt{LC}$ であることを検証する。
【準備】チョークコイル（$L = 1$H，巻き線抵抗 $r = 10\,\Omega$ 程度），コンデンサー（$22\,\mu$F～$220\,\mu$F，4種類），切り替えスイッチ，ロータリースイッチ，電池 4 個，オシロスコープ，カメラ，三脚

【実験方法】

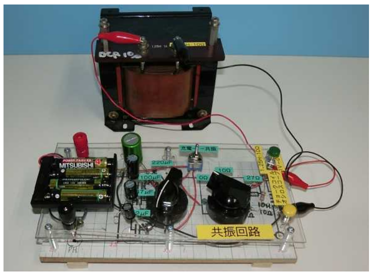
1　理論

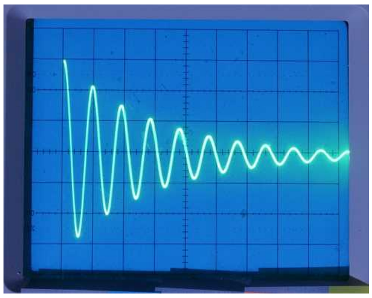
　図のような自己インダクタンス L〔H〕のコイルと電気容量 C〔F〕のコンデンサーの共振回路の周期 T〔s〕が，$T = kL^xC^y$ で表されるとき，x と y を定める。L と C の単位を V（ボルト），(アンペア)，s（秒）で表すと，L は【①〔Vs/A〕】，C は【②〔As/V〕】であることから，x ＝【③　1/2　】，y ＝【④　1/2　】である。よって，$T = kL^{【③】}C^{【④】}$ として，k を実験によって定める。



2　実験装置

① LCR メータを使って使用するコイルの自己インダクタンス L と巻き線抵抗 r を調べておく。
②図のような回路を作る。（コンデンサーの電気容量を変えることができるように，ロータリースイッチをつけると便利である。）
③オシロスコープのプローブはコンデンサーの両端の電圧を測定できるように接続する。
④オシロスコープのトリガーを Single モードにする。AC-DC-GND は DC にする。
⑤カメラでオシロスコープの画面を撮影できるようにする。露出は 0.5s～1.0s にする。





【実験】

①コンデンサーを充電する。
②カメラのシャッターを押した直後に，スイッチをコイル側に切り替える。
③撮影した画像のピークとピークの時間⊿t_i を測定する。
④電気容量の異なるコンデンサーで同じ測定をする。
⑤複数のピークが現れる場合は複数個のピーク間隔を調べ，平均し周期 T〔s〕を求める。

【結果】　巻き線抵抗 r ＝〔　10　〕Ω　インダクタンス L ＝〔　1.25　〕H

電気容量	コイル	$\sqrt{LC}$	周期⊿t〔s〕						
C〔μF〕	L〔H〕	〔s〕	Time/Div	⊿t_1	⊿t_2	⊿t_3	⊿t_4	T〔s〕	理論値
22	1.25	0.00524	0.02s	0.034	0.035	0.033	0.033	0.034	0.0329
47	1.25	0.00766	0.05s	0.048	0.048	0.045	0.050	0.048	0.0481
100	1.25	0.01118	0.05s	0.068	0.070	0.073	0.065	0.069	0.0703
220	1.25	0.01658	0.1 s	0.111	0.109	0.111	0.114	0.111	0.1042

【考察】

(1)【①】～【④】を説明する。
(2) 横軸に $\sqrt{LC}$，縦軸に T をとり，グラフを作れ。
(3) グラフから $T = k\sqrt{LC}$ の式の k を定めよ。

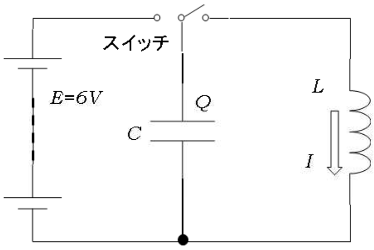
講座（　　）（　）年（　）組（　）席　名前	共同実験者
（　）月（　）日（　）曜（　）限　気温（　）℃　気圧（　　　）hPa　湿度（　　）%	

【実験】共振回路の周期（レポート）

【目的】共振回路の周期 T が $T = 2\pi\sqrt{LC}$ であることを検証する。

【実験方法】

1　理論



はじめ，電圧 E で充電された電気容量 C のコンデンサーに自己インダクタンス L のコイルをつないで，スイッチを閉じる。任意の時刻においてコンデンサーの電気量 Q，コイルの電流を I とするとき，コンデンサーとコイルの電圧は等しいので，

【(ｱ)　LdI/dt　】＝【(ｲ)　Q/C　】　・・・①

コンデンサーの電気量が減少するとき，コイルに $I = -dQ/dt$ の電流が流れるので，①式に代入すると

$L(d^2Q/dt^2) = CQ$　∴ d^2Q/dt^2 ＝【(ｳ)　$-Q/LC$　】・・・②

ここで，$Q = A\cos\omega t$ と仮定すると，この式は②を満たすことから，②式の解である。

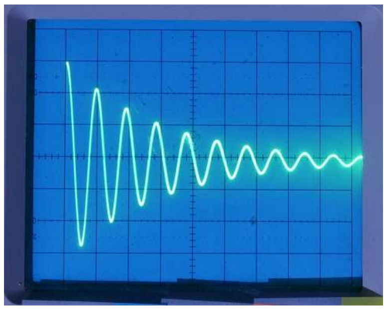
なお，②へ代入すると ω ＝【(ｴ)　$1/\sqrt{LC}$　】，よって，周期は T ＝【(ｵ)　$2\pi\sqrt{LC}$　】となる。

また，充電直後（$t = 0$）において，$Q = CE$ であることから，$A = CE$、任意の時刻 t のオシロスコープの電圧 V は，　$V = Q/C$ ＝【(ｶ)　$E\cos(t/\sqrt{LC})$　】・・・③

となり，オシロスコープの結果が説明できる。

なお，振幅が減衰するのは回路での電気エネルギーが消費されるためである。

【実験】



①コンデンサーを充電する。

②カメラのシャッターを押した直後に，スイッチをコイル側に切り替える。

③撮影した画像のピークとピークの時間 Δt_i を測定する。

④電気容量の異なるコンデンサーで同じ測定をする。

⑤複数のピークが現れる場合は複数個のピーク間隔を調べ，平均し周期 T〔s〕を求める。

【結果】

電気容量	コイル	$\sqrt{LC}$	周期⊿t〔s〕						
C〔μF〕	L〔H〕	〔s〕	Time/Div	⊿t_1	⊿t_2	⊿t_3	⊿t_4	T〔s〕	理論値
22	1.25	0.00524	0.02s	0.034	0.035	0.033	0.033	0.034	0.0329
47	1.25	0.00766	0.05s	0.048	0.048	0.045	0.050	0.048	0.0481
100	1.25	0.01118	0.05s	0.068	0.070	0.073	0.065	0.069	0.0703
220	1.25	0.01658	0.1 s	0.111	0.109	0.111	0.114	0.111	0.1042

【考察】

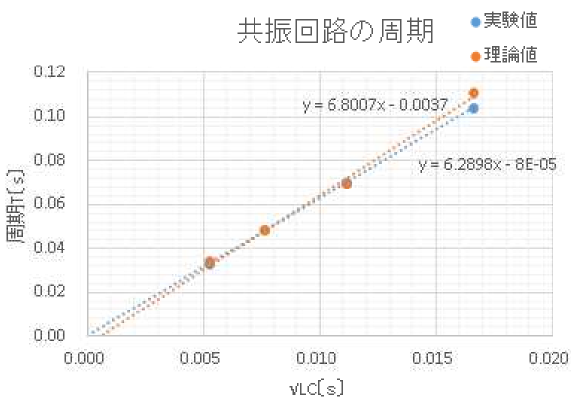
(1) $V = LdI/dt$，$Q = It$　$= CV$ より，L の単位は〔Vs/A〕，C の単位は〔As/V〕である。

〔s〕＝〔Vs/A〕^{x} ×〔Vs/A〕^{y} とすると

$x + y = 1$・・・①　　$x - y = 0$・・・②

より　　$x = y = 1/2$

(2) 右図



(3) グラフから $T = k\sqrt{LC}$ の式の k を定めよ。

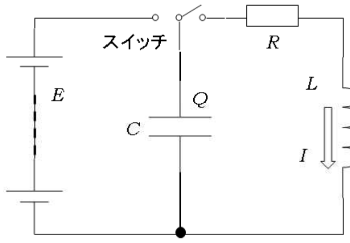
実験結果より，$k = 6.8$　（理論値は $2\pi = 6.28$）である。

講座（　　）（　）年（　）組（　）席　名前	共同実験者
（　）月（　）日（　）曜（　）限　気温（　）℃　気圧（　　　）hPa　湿度（　　）%	

【指導書解説】

1　減衰する振動回路

共振回路において，抵抗が無視できない場合，コンデンサーに充電後スイッチを閉じると，電流は減衰する。回路の抵抗 R〔Ω〕，電気容量 C〔F〕，インダクタンス L〔H〕として，キルヒホッフの法則を使うと，



$Q/C = LdI/dt + RI$　　　　　　　・・・①

となる。ここで，$I = -dQ/dt$ だから

①式を t で微分して，

$(1/C)\,dQ/dt = Ld^2I/dt^2 + RdI/dt$

$-(1/C)I = Ld^2I/dt^2 + RdI/dt$

$d^2I/dt^2 + (R/L)\,dI/dt + (1/LC)I = 0$ ・・・②

②式は２階常微分方程式である。

②の特性方程式 $\lambda^2 + (R/L)\lambda + (1/LC) = 0$ の解を λ_1，λ_2 とするとき，減衰振動を行う解は虚数解であることより，判別式 $D = (R/L)^2 - 4\,(1/LC) < 0$　すなわち，$R < 2\sqrt{L/C}$　という条件に於いて，λを解くと，

$\lambda = (1/2L)\{-R \pm i\sqrt{(4L/C) - R^2}\}$

という解を得る。

この式を，$\alpha = -R/2L$，$\beta = (1/2L)\cdot\{\sqrt{(4L/C) - R^2}\}$ と置くと，$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$　となる。②の一般解は次式で表せる。

$I = C_1e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}\{(C_1 + C_2)\cos\beta t + i(C_1 - C_2)\sin\beta t\}$

電流 I が実数である条件と，$t = 0$ のとき電流は流れていない（$I = 0$）ことから，$C_1 + C_2 = 0$，$C_1 - C_2 = Ai$　として，

$I = A\exp〔(-R/2L)t〕\sin〔\{\sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}\}t〕$・・・③

③式の振幅項 $\exp〔(-R/2L)t〕$は，時間とともに減衰していくことを表しており，回路のインダクタンス L に対して抵抗が R が大きいほど急速に減衰する。また，振動周期は $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\{\sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}\}$ であることを示している。

回路の抵抗を無視できる（$R = 0$）とき③式は，

$I = A\sin〔\{\sqrt{(1/LC)}t〕$・・・④

となり，減衰のない共振回路で振動周期が $T = 2\pi\sqrt{LC}$ となることを示している。

実験においては，$L = 1.25$H，$R = 10\,\Omega$，$C = 22\,\mu$F のとき，$T_1 = 2\pi/\{\sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}\} = 2\pi/\{\sqrt{(3.6\times 10^4) - 16}\}$ である。$3.6\times 10^4 >> 16$　だから，$T_1 \fallingdotseq 2\pi\sqrt{LC}$ であり，抵抗の周期に対する影響は小さい。

$L = 1.25$H，$R = (10 + 27)\,\Omega$，$C = 220\mu F$ の場合，$T_2 = 2\pi/\{\sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}\} = 2\pi/\{\sqrt{(3.6\times 10^3) - 876}\} = 2\pi/52$ となり，$T_0 = 2\pi/\{\sqrt{(1/LC)}\} = 2\pi/60$　と比較すると，$T_2/T_0 = 60/52 = 1.15$ となり，本設定の装置では 15％の影響が出てくる。巻き線抵抗 R が小さく，自己インダクタンス L の大きなチョークコイルを準備する必要性がある。なお，電気素子の誤差も小さくはない（10%程度）。

2　過減衰と臨界減衰

②の特性方程式の判別式 D が実数解を持つとき，すなわち $R > 2\sqrt{L/C}$R のとき，一般解は次式で表せる。過減衰という。

$I = C_1e^{(\alpha + \beta)t} + C_2e^{(\alpha - \beta)t}$　　（ただし，$\alpha = -R/2L$，$\beta = (1/2L)\cdot\{\sqrt{R^2 - (4L/C)}\}$）　）

である。ここで，$0 > \alpha + \beta > \alpha - \beta$ であることから，振動せずに減衰して $I = 0$ に近づく。

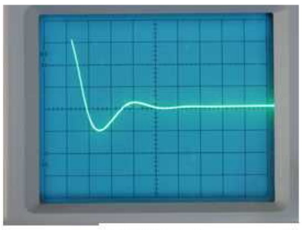
②の特性方程式の判別式 D が重解を持つとき，臨界減衰という。

$I = (C_1 + C_2t)\ e^{\alpha t}$　　（ただし，$\alpha = -R/2L$）

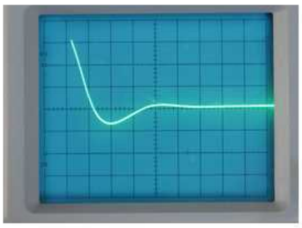
である。$C_1 + C_2t$ より $e^{\alpha t}$ が急激な減少関数なので，振動せずに減衰して $I = 0$ に近づく。

実験においては，$R = 10\,\Omega$，$L = 1.25$　H　を使っているので，判別式 $D = 0$ となるコンデンサーの容量 C は，$C = 4L/R^2 = (4\times 1.25)/10^2 = 0.05$F $= 5\times 10^4\ \mu F$ 。実験による $22 \sim 220\mu F$ の範囲では減衰振動である。次図は，別のコイル（$L = 11.4$H，$R = 189\,\Omega$）に $220\,\Omega$ の抵抗を直列につないで観測したオシロスコープの写真である。この場合，$C = 4L/R^2 = (4\times 11.4)/(220+189)^2 = 0.00027$F $= 2.7\times 10^{-4}$ $F = 270\mu F$ であるので，$22 \sim 220\mu F$ は，臨界減衰に近い領域にあたる。

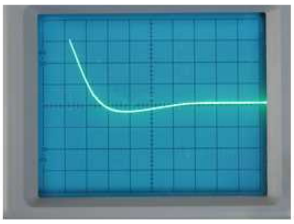
チョークコイル　11.4H　巻き線抵抗189Ω（抵抗＋220Ω＝409Ω）　　電圧2V/cm　時間0.05s/cm



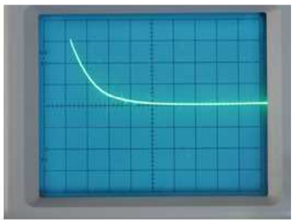
①$22\mu F$



②$47\mu F$



③$100\mu F$



④$220\mu F$