

## 【実験】人工衛星の軌道シミュレーション（実験書）

【目的】人工衛星を打ち上げた場合、打ち上げ時の高さや初速度によって軌道の形状がどう変わるかを検討する。

【準備物】コンピュータ、表計算ソフト（例 Excel）

【理論】地球（質量  $M$ ）による万有引力  $F$  によって運動する人工衛星（質量  $m$ ）の運動方程式は、地球の重心からの距離が  $r$  のとき、万有引力定数を  $G$  として

$$ma = GMm / r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。すなわち

$$a_x = GMx / r^3, \quad a_y = GM y / r^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

という加速度を生じている。時刻  $t$  の時刻で、人工衛星の位置を  $(x_k, y_k)$ 、速度を  $(u_{xk}, u_{yk})$  とする。 $\Delta t$  秒後の位置と速度  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ 、 $(u_{xk+1}, u_{yk+1})$  を、微小時間  $\Delta t$  の間は、加速度が  $(a_{xk}, a_{yk})$  で一定であるとして、

$$(u_{xk+1}, u_{yk+1}) = (u_{xk}, u_{yk}) + (a_{xk}, a_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + (u_{xk}, u_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{4}$$

によって求めることができる。なお、このときの地球の中心からの距離  $r_k$  は、

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。

【実験】①表計算ソフトで次表を作る（地上打ち上げの場合の例とする）。

初期位置  $x = R$ （地球半径）+  $h$ （水平射出高度）=  $6.4 \times 10^6$  m  $y = 0$   $\dots (t = 0)$

初速度  $u_{x0} = 0$   $u_{y0} = 8.0 \times 10^3$  m/s  $\dots y$  方向（地表と水平に打ち出す）

万有引力定数  $G = 6.67384 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> 地球質量  $M = 5.972 \times 10^{24}$  kg

シミュレーション間隔  $\Delta t = 1$  s（シミュレーション間隔は変えられるようにする。）

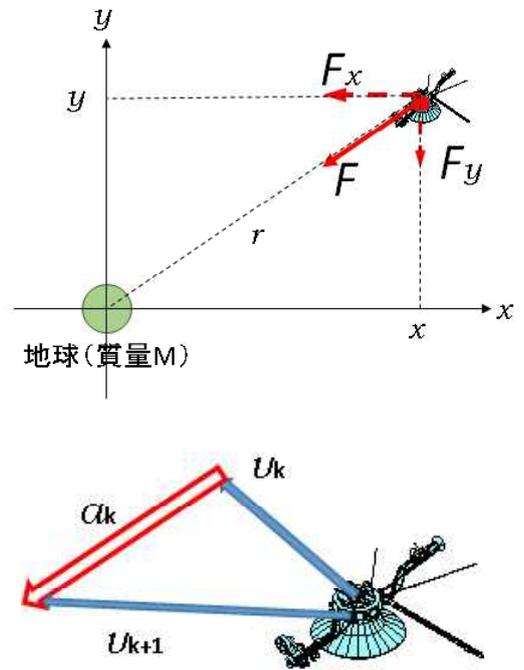
<表>

k	t	x <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	r <sub>k</sub>	u <sub>xk</sub>	u <sub>yk</sub>	a <sub>xk</sub>	a <sub>yk</sub>
k=0	t <sub>0</sub> = 0	x <sub>0</sub> = 6.4 × 10 <sup>6</sup>	y <sub>0</sub> = 0	式⑤	u <sub>x0</sub> = 0	u <sub>y0</sub> = 8.0 × 10 <sup>3</sup>	式②	式②
1	t <sub>0</sub> + Δt	式④	式④	式⑤	式③	式③	式②	式②
2	t <sub>1</sub> + Δt	以下は上の式をコピーする						
~								
10000								

②表の  $(x_k, y_k)$  の領域を範囲指定して、散布図（プロット）で  $x-y$  平面上に点を描かせる。

③初速度や射出高度を変えたとき軌道の形状がどうなるかを実験する。

【発展】質量を太陽の質量に変えると太陽系の様子がわかる。



## 【実験】人工衛星の軌道シミュレーション（レポート）

【目的】人工衛星を打ち上げた場合、打ち上げ時の高さや初速度によって軌道の形状がどう変わるかを検討する。

【理論】地球（質量  $M$ ）による万有引力  $F$  によって運動する人工衛星（質量  $m$ ）の運動方程式は、地球の重心からの距離が  $r$  のとき、万有引力定数を  $G$  として

$$ma = GMm / r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。すなわち

$$a_x = GMx / r^3, \quad a_y = GM y / r^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

という加速度を生じている。時刻  $t$  において、人工衛星の位置を  $(x_k, y_k)$ 、速度を  $(u_{xk}, u_{yk})$  とする。 $\Delta t$  秒後の位置と速度  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ 、 $(u_{xk+1}, u_{yk+1})$  は、微小時間  $\Delta t$  の間は、加速度が  $(a_{xk}, a_{yk})$  で一定であるとして、

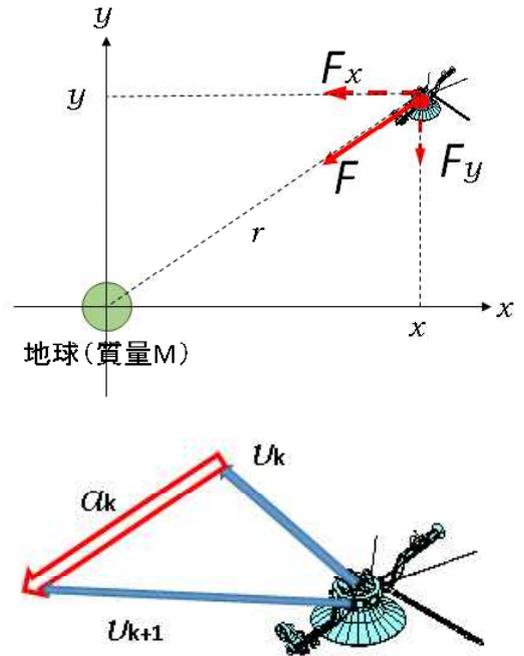
$$(u_{xk+1}, u_{yk+1}) = (u_{xk}, u_{yk}) + (a_{xk}, a_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + (u_{xk}, u_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{4}$$

によって求めることができる。なおこのときの地球の中心からの距離  $r_k$  は、

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。



【実験結果】 添付欄（高度と初速度を記入）

【考察】

講座 ( ) ( ) 年 ( ) 組 ( ) 席 名前	共同実験者
( ) 月 ( ) 日 ( ) 曜 ( ) 限 気温 ( ) °C	気圧 ( ) hPa 湿度 ( ) %

## 【実験】人工衛星の軌道シミュレーション（実験例）

【目的】人工衛星を打ち上げた場合、打ち上げ時の高さや初速度によって軌道の形状がどう変わるかを検討する。

【理論】地球（質量  $M$ ）による万有引力  $F$  によって運動する人工衛星（質量  $m$ ）の運動方程式は、地球の重心からの距離が  $r$  のとき、万有引力定数を  $G$  として

$$m\vec{a} = -GMm\vec{r} / r^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。すなわち

$$a_x = -GMx / r^3, \quad a_y = -GM y / r^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

という加速度を生じている。時刻  $t$  において、人工衛星の位置を  $(x_k, y_k)$ 、速度を  $(u_{xk}, u_{yk})$  とする。 $\Delta t$  秒後の位置と速度  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ ,  $(u_{xk+1}, u_{yk+1})$  は、微小時間  $\Delta t$  の間は、加速度が  $(a_{xk}, a_{yk})$  で一定であるとして、

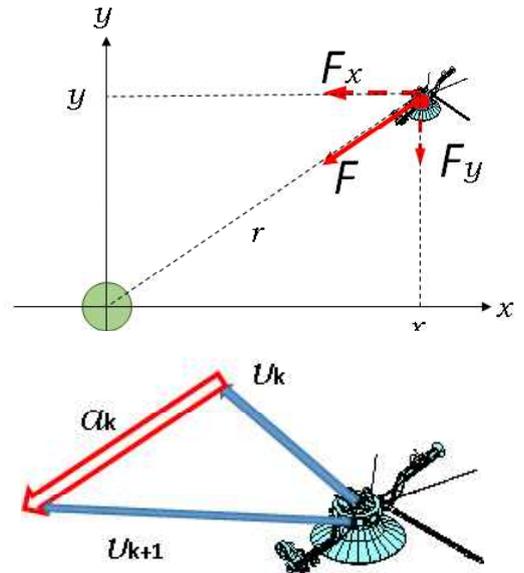
$$(u_{xk+1}, u_{yk+1}) = (u_{xk}, u_{yk}) + (a_{xk}, a_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + (u_{xk}, u_{yk}) \Delta t \quad \dots \textcircled{4}$$

によって求めることができる。なおこのときの地球の中心からの距離  $r_k$  は、

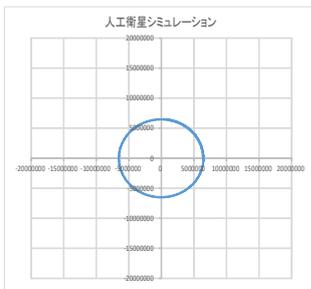
$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。

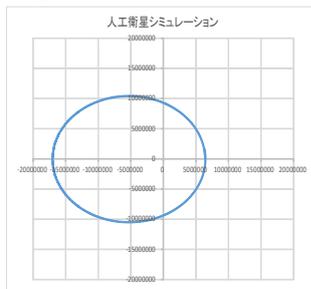


【実験結果】 地上発射  $R + h = 6400\text{km}$

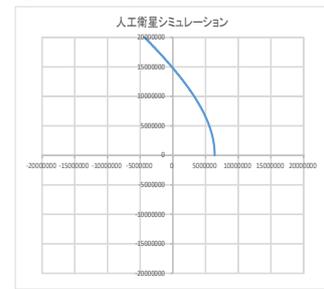
①  $u_0 = 7.9\text{km/s}$



②  $u_0 = 9.5\text{km/s}$



③  $u_0 = 12\text{km/s}$



【考察】

- ① 第一宇宙速度あたりでは円軌道
- ② 第一宇宙速度を超えると楕円軌道
- ③ 第二宇宙速度を超えると飛び去る

このほか、高度を上げると第一宇宙速度が  $7.9\text{km/s}$  より小さくなることを確認できる。

講座 ( ) ( ) 年 ( ) 組 ( ) 席 名前	共同実験者
( ) 月 ( ) 日 ( ) 曜 ( ) 限 気温 ( ) °C 気圧 ( ) hPa 湿度 ( ) %	