

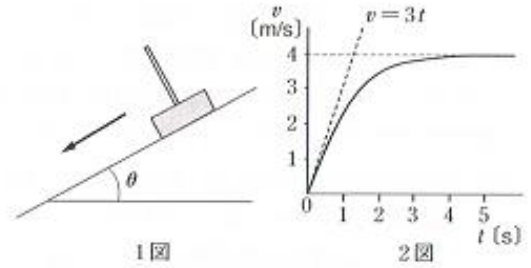
30 終端速度

【問題 30】終端速度

岐阜大 1999

傾角 θ の長い斜面上を 1 図のような逆 T 字型の物体がすべる運動を考える。物体の質量を M 、動摩擦係数を μ 重力加速度の大きさを g とする。速度 v に対して空気抵抗力 kv がはたらくものとする (k は比例定数)。

- 滑り運動中の物体に作用する力の名称とその向きを矢印で図の上に示せ。
- 物体が加速度 a で運動しているとき運動方程式を求めよ。
- しばらくして等速度運動になった場合の速度 v を求めよ
- 傾角 $\theta = 45^\circ$ のとき、2 図の曲線のような実験結果が得られた。なお、2 図の斜めの点線 $v=3t$ は、時間 $t=0$ の接線とする。
- 空気抵抗力の係数 k を求めよ。



【解答】

(1) 右図実線

(2) 斜面下向きの加速度を a とする。

$$Ma = Mg \sin \theta - kv - \mu N$$

$$\text{ただし、} N = Mg \cos \theta \quad \dots \text{①}$$

$$\therefore Ma = Mg \sin \theta - (\mu Mg \cos \theta + kv)$$

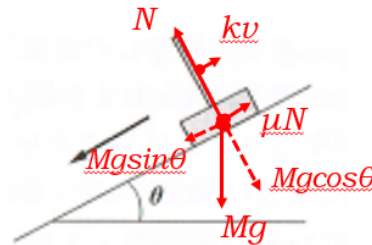
(3) 等速度運動をするので $a=0$ 。

$$\text{①より、} v = \frac{Mg}{k} (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$(4)(5) \text{ 2 図より、} v = \frac{Mg}{k} (\sin \theta - \mu \cos \theta) = 4 \quad \dots \text{②} \quad g(\sin \theta - \mu \cos \theta) = \frac{4k}{M}$$

$$\text{また、} v=0 \text{ とし } t=0 \text{ の加速度は、} a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta = 3 \quad \therefore \frac{4k}{M} = 3 \quad k = \frac{3M}{4}$$

$$g \sin 45^\circ - \mu g \cos 45^\circ = 3 \text{ より } \mu = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{g}$$



- Mg ; 重力
- N ; 垂直抗力
- μN ; 動摩擦力
- kv ; 空気抵抗力

【検証実験】

1 実験装置

(1)理論

空気抵抗力は、速度と反対の向きにその大きさに比例し、 kv と表せるものとする。図1のように、質量 m (重力 mg)の物体が、速度 v で落下しているとき、物体の運動方程式は、

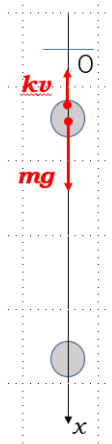
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv \quad \dots \text{①}$$

①より、

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{kv}{m}$$

$$\frac{d}{dt} \left(v - \frac{mg}{k} \right) = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right) \quad \dots \text{②}$$

②式を積分して、

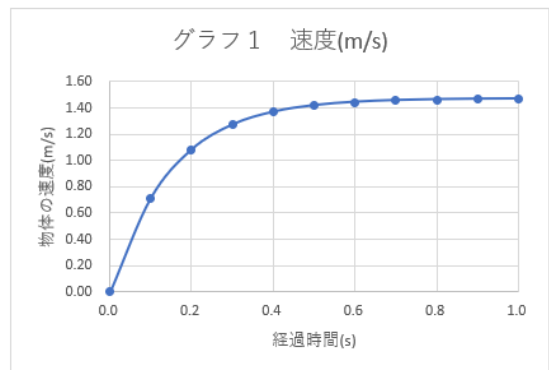


$$v = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

$t \rightarrow 0$ のとき、初速度 v_0

$t \rightarrow \infty$ のとき、終端速度 $v_f = \frac{mg}{k}$ となる。

グラフ 1 は、 $m=0.002$, $k=0.012$, $v_0=0$ として計算した。



(2)装置の作成

準備物	品名	規格	個数	備考
センサー	モーションセンサー		1	島津製作所
インターフェイス	AirLink		1	島津製作所
測定アプリ	SPARKVue		1	島津製作所
スタンド		90 c m程度	1	
紙カップ		5 c m程度	1	100円ショップ
その他	パソコンまたはi-phone			

表 1 の部品を準備し、A スタンドに AirLink に つないだ距離センサー をセットする。測定対象 の物体はお弁当に入れる 紙カップ、または半球 型のスチロールが適切である。

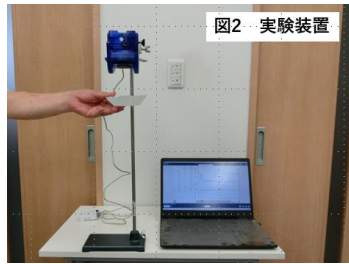


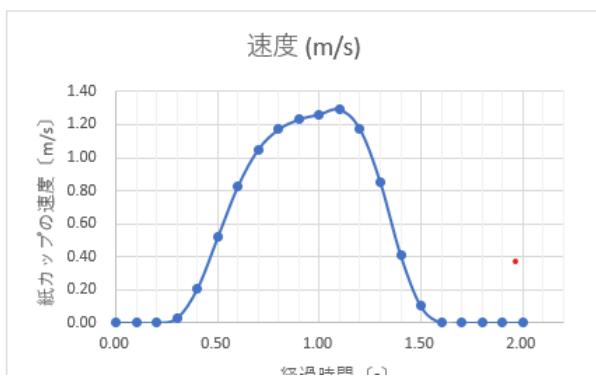
図2 実験装置

2 実験方法

- ① 精密はかりで、物体の質量を測定する。
- ② インターフェイスに電源を入れ、測定アプリを起動させる。
- ③ サンプリング速度、表示有効数字、測定項目等の設定を行う。
- ④ 測定物体を落下させてデータを取得する。
- ⑤ データをエクセルにエクスポートし、 $v-t$ グラフを作成する。
- ⑥ 理論をもとに終端速度から空気抵抗係数を求める。

3 実験結果

- (1) 紙カップの質量 $m=0.554 \times 10^{-3} \text{kg}$
- (2) 実験結果グラフ



- (3) グラフの形状から終端速度 $v_f=1.4 \text{m/s}$ と見積もって、

$$k = \frac{0.554 \times 10^{-3} \text{kg} \times 9.80 \text{m/s}^2}{1.4 \text{m/s}} = 3.87 \times 10^{-2} \text{kg/s}$$

4 授業への活用

この距離センサーは、超音波センサーを組み込んだ ICT 機器である。いわゆる記録タイマーを使ったテープの解析を自動化してくれる機器である。速度や加速度を理解するためには記録タイマーの実験は必要であるが、応用としての運動解析では、すぐに結果が見られるので効率的である。

形状が異なる物体の空気抵抗を測定して、空気抵抗の原因を考察することが有意義である。この実験結果を理論と比較すると、速度の立ち上がりとある程度速くなったあとに特徴がみられる。質量が小さくそこが平らなカップ形状の物体の周りの空気の流れを推測すると、

- ① 落下のはじめでは、底の平面が空気抵抗の主な原因となり、速さに比例する抵抗となる。
- ② 速が大きくなると、空気の流れがカップの後面(上面)に回り込んで乱流となり、速さの 2 乗に比例する空気抵抗に近づいていく。

という様子を読み取れ、流体力学の学習への発展的なアプローチが可能である。

粘性抵抗と慣性抵抗

流体が円筒形の管内を流れるとき、流れ方を典型的な 2 種類に分類すると、層流と乱流に分けられる。層流では流れの速さの異なる細い管が束ねられた状態で流れており、管の端では流れの相対速度が 0、中央部分が最も早くなっている。層流において、管の断面方向(図の上下方向)を y 座標とし、流速を v とすると、粘性力 T は、 $T = \eta (dv/dy)$ と表される。 η を粘性係数という。両端の速度が 0 なので、粘性係数が大きい流体は中央で流れが遅い。



層流



乱流

層流の中に半径 r の球状の物体を入れると、この速度に抵抗する力を受ける。詳しい計算では、その大きさは $F = 6 \pi \eta r v$ であることが知られており、ストークスの法則と呼ばれる。密度 ρ の流体中を速さ v で運動する断面積 A の物体に作用する流体の抵抗 F は、ベルヌーイの法則から $\frac{1}{2} C \rho A v^2$ であらわされる。抵抗係数 C は球の場合、約 0.5 であることが知られている。この抵抗力は球上の物体の後面に真空が生じ流体が流れ込んで乱流が起こることが原因である。